Sur l'existence de solutions d'un problème d'évolution apparaissant en physique des semi-conducteurs

E. Fernandez Cara

IRIA

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:954 90 20

Rapports de Recherche

N° 79

SUR L'EXISTENCE DE SOLUTIONS D'UN PROBLÈME D'ÉVOLUTION APPARAISANT EN PHYSIQUE DES SEMICONDUCTEURS

Enrique FERNANDEZ CARA

Juin 1981

SUR L'EXISTENCE DE SOLUTIONS D'UN PROBLEME D'EVOLUTION APPARAISANT EN PHYSIQUE DES SEMICONDUCTEURS (I)

Enrique FERNANDEZ CARA

RESUME

Nous présentons ici l'Analyse et certains résultats d'existence de solutions d'un problème d'évolution parabolique non-linéaire qui apparait en Physique des Semiconducteurs. Dans la Section 1 ci-après, on formule le problème pour des conditions aux limites assez générales. Dans la Section 2, on introduit un problème d'évolution dont le problème de la Section précédente est un cas particulier ; ensuite, on considère la version "réduite", obtenue en imposant une "condition de sécurité", qui revient en fait à des hypothèses de coercivité facilitant la résolution du problème considéré. Finalement, on établit des résultats d'existence par la méthode de compacité. Il semble intéressant (même du point de vue physique) d'étudier le problème stationnaire associé, ce que nous ferons dans une deuxième partie.

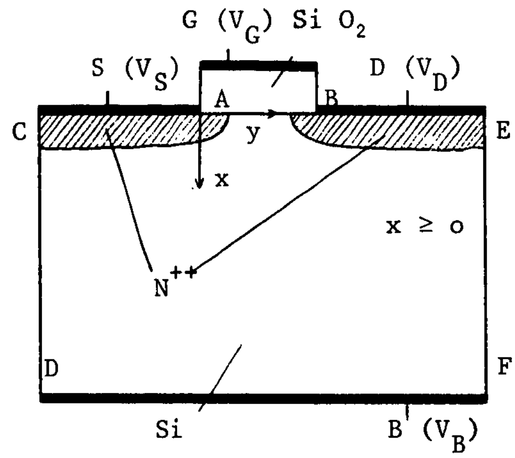
ABSTRACT

We present here the Analysis and certain existence results concerning a non-linear parabolic problem in Semiconductor Device Theory. We state the problem in Section 1 for quite general boundary conditions. In Section 2 we are led to a particular case, and we introduce a "reduced" problem, obtained by means of a "security assumption". Finally, we use the compacity method to give some existence results. It seems to be interesting (even from the Physical point of view) to study the associated steady problems, as it will be done in a subsequent paper.

1 - ANALYSE DU PROBLEME

1.1. - Les Equations et les Conditions aux Limites

On considère le dispositif de la Fig. 1 ; on note par n et p les densités des électrons et des trous, respectivement. Les densités (intrinsèques) des porteurs, notées $\vec{J}_n$ et $\vec{J}_p$ seront données par



(1.1) $$\begin{cases} \vec{J}_n = q\mu_n n\vec{E} + \\ + qD_n\vec{\nabla}n \end{cases}$$

et

(1.2) $$\begin{cases} \vec{J}_p = q\mu_p p\vec{E} - \\ - qD_p\vec{\nabla}p, \end{cases}$$

où $q = 1.6.10^{-19}$ cb est la charge de l'électron, $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ (champ électrostatique), μ_n et μ_p sont les mobilités des électrons et des trous respectivement, et

$$D_r = \frac{kT}{q}\mu_r \text{ (pour } r = n,p),$$

k étant la constante de Boltzmann ($= 1.38.10^{-23}$ J/$°_K$) et T la température absolue (= 300°K, à 27°C).

Le potentiel V doit satisfaire l'équation de POISSON :

(1.3) $$-\Delta V = -\frac{q}{\varepsilon}(n - p + \mathrm{Dop}),$$

où $\varepsilon = \varepsilon_o\varepsilon_i$, ε_o étant la permitivité du vide ($= 1/(36\pi.10^9)$ F/m et ε_i la constante diélectrique du milieu considéré. Pour le SiO_2, $\varepsilon_i = \varepsilon_{ox} = 4$; pour le Si, $\varepsilon_i = \varepsilon_{si} = 12$. Dop est le dopage, donné par

$$\mathrm{Dop} = N_A - N_D,$$

Le dopage N_A étant de type p et N_D de type n.

Les inconnues n, p et V doivent satisfaire les équations (3),

(1.4) $$\frac{\partial n}{\partial t} = G - R + \frac{1}{q}\vec{\nabla}.\vec{J}_n$$

et

(1.5) $$\frac{\partial p}{\partial t} = G - R - \frac{1}{q}\vec{\nabla}.\vec{J}_p,$$

avec $\vec{J}_n$ et $\vec{J}_p$ données par (1) et (2) resp., dans la partie du dispositif occupée par le Silicium ; là où la charge volumique est nulle (c'est le cas du SiO_2), les équations sont

$$n = p = o \quad (\vec{J}_n = \vec{J}_p = o)$$

et

$$\Delta V = o.$$

Dans (4) et (5) G est le terme de génération, égal à l'avalanche ($\frac{1}{q}(\alpha_n|\vec{J}_n| + \alpha_p|\vec{J}_p|)$, avec $\alpha_r = A_r.\exp(- B_r/|\vec{E}|)$, r = n,p) plus le flux lumineux ($\gamma\phi_1$) ; R est le terme de recombinaison (égal à $(np - n_i^{\,2})/(\tau_p(n + n_t) + \tau_n(p + p_t))$, où

$$n_t = n_i.\exp(\frac{E_t - E_i}{KT}),\ p_t = n_i.\exp(\frac{E_i - E_t}{KT}),$$

n_i est la concentration intrinsique du Si à 300°K et les coefficients τ_p et τ_n dépendent du dopage).

On suppose qu'il est possible d'appliquer la statistique de BOLTZMANN et alors, n et p peuvent être écrits comme suit :

(1.6) $$n = n_i.\exp(\frac{V - \phi_n}{v_T}),\ p = n_i.\exp(\frac{\phi_p - V}{v_T}),$$

avec $v_T = kT/q$.

On déduit de (1), (2), et (6) les relations

(1.1') $$\vec{J}_n = - q\mu_n n\ \vec{\nabla}\phi_n\ ,$$

(1.2') $$\vec{J}_p = - q\mu_p p\ \vec{\nabla}\phi_p\ .$$

La mobilité μ_r (r = n ou p) est donnée par

(1.7) $$\mu_r = \frac{\mu_o}{(1 + |\frac{Ex}{Ec}|)(1 + |\frac{Ey}{Eo}|\beta)^{1/\beta}} ,$$

avec

(1.8) $$\frac{1}{\mu_o} = \frac{1}{\mu_B} + \frac{1}{\mu_S} , \quad \mu_B = \frac{\mu_{max} - \mu_{min}}{1 + \left[\frac{N_A + N_D}{N_{réf}}\right]^a} + \mu_{min} , \text{ et}$$

$$\mu_S = \mu_{So} \{1 + A(1 - \exp(- \frac{x}{x_o}))\} ,$$

dans le Si, au voisinage de l'interface Si - SiO_2. Dans le reste du dispositif, elle est donnée par

(1.9) $$\mu_r = \frac{\mu_B}{(1 + |\frac{E}{E_o}|^{\beta})^{1/\beta}} .$$

Toutes les constantes qui apparaissent dans les équations (1) -(9) sont spécifiées dans (1.3).

On impose les conditions aux limites suivantes (voir la Fig. 1) :

<u>A-C</u>, <u>B-E</u>, <u>D-F</u> (Métal)

(1.10) $$np = n_i^2 , \; n - p + Dop = o, \; V \equiv cte.$$

<u>A-B</u> (Interface Si - SiO_2) ($\perp$ $\equiv$ ortogonal à l'interface)

(1.11) $$\begin{cases} \varepsilon_o \varepsilon_{ox} E_{ox\perp}\big|_{x=o} - \varepsilon_o \varepsilon_{si} E_{si\perp}\big|_{x=o} \equiv \\ \equiv \left[\varepsilon_o \varepsilon_i E_\perp\right]_{x=o^-} - \left[\varepsilon_o \varepsilon_i E_\perp\right]_{x=o^+} = q \frac{Dss}{V_o}(\phi_S - \phi_o) , \end{cases}$$

(Loi de Gauss), où les constantes D_{ss} et V_o et les fonctions ϕ_s et ϕ_o sont connues.

(1.12) $$\begin{cases} J_{n\perp}\big|_{x=o} = - J_{p\perp}\big|_{x=o} = qS_o \frac{p_s n_s - n_i^2}{p_s + n_s + 2n_i} \equiv \\ \equiv qS_o \frac{pn - n_i^2}{p + n + 2n_i} \Big|_{x=o} , \end{cases}$$

où S_o est aussi une valeur connue.

C-D, E-F

(1.13) $$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial n}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} = o \ , \ \frac{\partial E}{\partial y} = o.$$

Le potentiel est supposé continu dans tout le dispositif.

1.2. - Une Première Formulation du Problème

Prenons

(1.14) $$\psi = \frac{V}{v_T} \ , \ u = \frac{n}{v_T} = \frac{n_i}{v_T} \exp(\psi - \zeta_n) \ , \ v = \frac{p}{v_T} = \frac{n_i}{v_T} \exp(-\psi + \zeta_p) \ ,$$

avec $\zeta_n = \phi_n/v_T$, $\zeta_p = \phi_p/v_T$; on peut alors écrire (1) sous la forme :

(1.1") $$\vec{J}_n = qv_T^2\mu_n(\nabla u - u\nabla\psi) \ ,$$

et analoguement, (2) s'écrira comme suit :

(1.2") $$\vec{J}_p = -qv_T^2\mu_p(\nabla v + v\nabla\psi) \ .$$

On obtient donc, de (4)-(5), les équations

(1.15) $$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \nabla\cdot(\mu_u\nabla u) - \nabla\cdot(\mu_u u\nabla\psi) - \frac{uv - c_i^2}{\tau_p(u+u_t) + \tau_n(v+v_t)} + \\ &+ \alpha_n\mu_u|\nabla u-u\nabla\psi| + \alpha_p\mu_v|\nabla v+v\nabla\psi| + \tilde{\gamma}\phi_1 \ , \end{aligned} \right.$$

(1.16) $$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \nabla\cdot(\mu_v\nabla v) + \nabla\cdot(\mu_v v\nabla\psi) - \frac{uv - c_i^2}{\tau_p(u+u_t) + \tau_n(v+v_t)} + \\ &+ \alpha_n\mu_n|\nabla u-u\nabla\psi| + \alpha_p\mu_v|\nabla v+v\nabla\psi| + \tilde{\gamma}\phi_1 \ , \end{aligned} \right.$$

où

$$\mu_u = v_T\mu_n \ , \ \mu_v = v_T\mu_p \ , \ c_i = \frac{n_i}{v_T} \ , \ \tilde{\gamma} = \gamma/v_T \ , \ u_t = n_t/v_T \text{ et } v_t = p_t/v_T \ .$$

Pour $\kappa = \varepsilon/q$, on obtient de (3) :

(1.17) $$- \kappa\Delta\psi = N+v-u \ ,$$

où $N = -Dop/v_T = - (N_A-N_D)/v_T$.

En termes de u, v et ψ, les conditions aux limites pourront s'écrire :

A-C, B-E, D-F (Métal)

(1.18) $uv = c_i^2$, $u-v-N = o$, $\psi \equiv$ cte. par morceaux.

A-B (Interface Si - SiO_2)

(1.19) (Loi de Gauss) $\nu\cdot\nabla\psi = f_\psi^2 \equiv$ fonction connue.

(1.20a) $\nu\cdot(\nabla u - u\nabla\psi) = f_u^2 \equiv$ fonction des "traces" de u et v sur A-B.

(1.20b- $\nu\cdot(\nabla v + v\nabla\psi) = f_v^2 \equiv$ fonction des "traces" de u et v sur A-B.

(1.21) $\nu\cdot\{\mu_n(\nabla u - u\nabla\psi) - \mu_p(\nabla v + v\nabla\psi)\} = o$ (compatibilité entre f_u^2 et f_v^2).

C-D, E-F

(1.22) $\nu\cdot\nabla\psi = \nu\cdot\nabla u = \nu\cdot\nabla v = o$.

(1.23) $\frac{\partial}{\partial\nu}(\nabla\psi) = o$.

Remarque 1.1. Noter que (18) peut aussi bien s'écrire de la forme équivalente

(1.18') $u = \frac{N}{2} \pm \sqrt{\frac{N^2}{4} + c_i^2}$, $v = -\frac{N}{2} \pm \sqrt{\frac{N^2}{4} + c_i^2}$, $\psi \equiv$ cte. par morceaux,

et, comme du point de vue physique nous ne sommes intéressés que par des solutions positives de (15)-(16), cette condition aux limites peut être remplacée par

(1.18") $u = f_u^1$, $v = f_v^1$, $\psi = f_\psi^1$ sur A-B ,

où les fonctions f_u^1 et f_v^1 sont connues, et f_ψ^1 est constante par morceaux. ∎

Remarque 1.2. Le problème considéré a été formulé dans MERCKEL [1]. Un problème voisin est posé dans MOCK [2]. ∎

1.3. - Récapitulation. Données relatives au problème

n : densité des électrons, p : densité des trous,

$\vec{J}_r$ (r = n ou p) : densité (intrinsèque) des porteurs,

V : potentiel électrostatique,

R : terme de Recombinaison (approx. de Hall-Schockley-Read), G : terme de génération (composé de l'avalanche $(\frac{1}{q}(\alpha_n|\vec{J}_n|+\alpha_p|\vec{J}_p|))$ et du flux lumineux $(\gamma\phi_1)$),

Dop : dopage (N_A : dopage de type p, N_D : dopage de type n),

q : charge de l'électron ($1.6.10^{-19}$cb.),

k : constante de Boltzmann ($1.38.10^{-23}$J/°K),

T : 300°K (température absolue),

ε_o : permittivité du vide ($1/(36\pi\cdot 10^9)$ F/m),

ε_i : constante diélectrique du milieu considéré ($\varepsilon_1 = \varepsilon_{ox} \equiv 4$ pour le SiO_2, et $\varepsilon_i = \varepsilon_{si} = 12$ pour le Si),

n_i : concentration intrinsèque du Si à 300°K ($1.45.10^{10}$at/cm^3),

A et x_o sont des données ajustables (A = 100 ; pour x = o, $\mu_s = \mu_{so} \simeq \mu_B$; pour $x = 10^3$Å, $\mu_o \simeq 0.9\ \mu_B$),

μ_r (r = n ou p) : mobilité des porteurs,

$\mu_{max,p} = 495$ cm^2/Vs , $\mu_{max,n} = 1330$ cm^2/Vs ,

$\mu_{min,p} = 48$ cm^2/Vs , $\mu_{min,p} = 65$ cm^2/Vs ,

$N_{réf,p} = 6.3.10^{16}$at/cm^3 , $N_{réf,n} = 8.5.10^{16}$at/cm^3,

$a_p = 0.76$, $a_n = 0.72$,

$\beta_p = 1$, $\beta_n = 2$,

$E_{c,p} = 50$ à 100 V/µm , $E_{c,n} = 50$ à 100 V/µm ,

$E_{o,p} = 7$ à 15 V/µm , $E_{o,n} = 2$ à 6 V/µm ,

(les valeures typiques des $E_{o,r}$ sont 10 et 4 V/µm , resp.) ,

$A_p = 2.25\cdot 10^7$ cm^{-1} , $A_n = 3.8\cdot 10^6$ cm^{-1} ,

$B_p = 3.26\cdot 10^6$ cm^{-1} , $B_n = 1.75\cdot 10^6$ cm^{-1} ,

$\tau_p = 1$ µs , $\tau_n = 1$ µs ,

$D_{ss} = 10^{10}$ à $5\cdot 10^{11}$ états/cm^2 (typique = $5\cdot 10^{10}$) ,

$V_o = 1$ V, $S_o = 10$ cm/s .

2. - LES RESULTATS D'EXISTENCE.

2.1. Notations et Lemmes.

On se donne maintenant un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ assez régulière. Dans la suite, on désignera par $((\cdot,\cdot))$ et $\|\cdot\|$ le produit scalaire et la norme des $H^1(\Omega)^r$, avec r entier ≥ 1, respectivement. Analoquement, $(\cdot,\cdot)$ et $|\cdot|$ désigneront le produit scalaire et la norme des $L^2(\Omega)^r$.

On pose, pour i=1,2, et $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$$P_i(\xi) = \frac{g_i}{(1+|\frac{\xi_1}{a_i}|)(1+|\frac{\xi_2}{b_i}|)\dots(1+|\frac{\xi_{N-1}}{c_i}|)(1+|\frac{\xi_N}{d_i}|^\beta)^{1/\beta}},$$

avec $g_i \in L^\infty(\Omega)$, $0 < g_{oi} \leq g_i(x) \leq g_{1i}$ p.p. dans Ω et $a_i, b_i, \dots, c_i, d_i > 0$, $\beta > 0$. Evidemment l'opérateur $\xi \to P_i(\xi)$ est continu et borné de $L^2(\Omega)$ dans $L^S(\Omega)$, pour tout $S > 1$ fini.

On considère d'autre part une fonction continue $\xi \to R(\xi)$ de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, telle que

$$|R(\xi)| \leq c(1+|\xi_1|+|\xi_2|), \quad \forall \xi = (\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2, \ c > 0.$$

On arrive sans peine au résultat suivant (cf. BERGER [3]) :

Lemme 2.1 : "L'opérateur de composition $\xi \to R(\xi)$ est continu et borné de $L^2(\Omega)^2 \to L^2(\Omega)$".

Dans les cas typiques on prendra

$$R(\xi_1,\xi_2) = \eta \frac{\xi_1^+\xi_2^+-c^2}{q_1\xi_1^++q_2\xi_2^++\tau},$$

avec $\eta \in L^\infty(\Omega)$ et c, q_1, q_2 et τ des constantes positives (terme de recombinaison de Hall-Shockley-Read). On voit immédiatement que la condition antérieure est remplie.

Finalement, on considérera une fonction continue $(\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3) \to$
$\to h(\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ de $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^1$, telle que :

$$|h(\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)| \le C'(1+|\xi_1|+|\xi_2|+|\eta_1|+|\eta_2|+|\eta_3|)$$

$$\forall\ (\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N,\ c'>0$$

(où on a noté $|\eta_i| = (|\eta_{i1}|^2+\ldots+|\eta_{iN}|^2)^{1/2}$, pour $\eta_i = (\eta_{i1},\ldots\eta_{iN})\in\mathbb{R}^N)$; on a encore

<u>Lemme 2.2</u> :"<u>L'opérateur de composition</u> $(\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3) \to h(\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ <u>est continu et borné de</u> $L^2(\Omega)^2\times L^2(\Omega)^N\times L^2(\Omega)^N\times L^2(\Omega)^N \to L^2(\Omega)$.

Par simplicité, si ψ, u_1, $u_2\in H^1(\Omega)$, on écrira

$$h(u_1,u_2,\nabla\psi) \equiv h((u_1,u_2),\nabla u_1,\nabla u_2,\nabla\psi),$$

l'opérateur $(u_1,u_2,\psi) \to h(u_1,u_2,\nabla\psi)$ étant continu et borné de $H^1(\Omega)^3 \to L^2(\Omega)$.

Les exemples typiques sont fournis par

$$h(u_1,u_2,\nabla\psi) = \alpha_1P_1(\nabla\psi)|\nabla u_1-u_1\nabla\psi| + \alpha_2P_2(\nabla\psi)|\nabla u_2+u_2\nabla\psi|$$

(terme d'avalanche), avec $\alpha_1,\alpha_2\in L^\infty(\Omega)$, et les P_i comme ci-dessus ; il est facile de démontrer que le lemme reste encore valable.

Dans la suite on désignera la trace d'une fonction $u\in H^1(\Omega)$ par $u|_\Gamma$ ou γ_0u, et si $u\in H^2(\Omega)$, $\nu\cdot\nabla u$ désignera, comme d'habitude, la dérivée de la fonction u dans la direction de la normale extérieure ν à Γ.

On se donne une valeur réelle $T>0$, et on suppose que la frontière peut se partager en deux sous-variétés Γ_u et Γ_ψ disjointes et de capacité non nulle.

Soient $\tilde f^1_\psi\in H^{1/2}(\Gamma)$, $\tilde f^2_\psi\in H^{-1/2}(\Gamma)$, et $\tilde f^1_{u_1}$ et $\tilde f^1_{u_2}$ deux fonctions admettant un relèvement dans $H^2(\Omega)$, telles que

$$\tilde{f}^1_{u_1} = 0,\ \tilde{f}^1_{u_2} = 0 \text{ sur } \Gamma_\psi \ ;$$

on appellera f^1_ψ et f^2_ψ aux restrictions de $\tilde{f}^1_\psi$ et $\tilde{f}^2_\psi$ à Γ_u et Γ_ψ respectivement, et on suivra la même convention pour les fonctions $\tilde{f}^1_{u_i}$.

Evidemment, on peut trouver une fonction $U_h = (U_{h_1}, U_{h_2}) \in H^2(\Omega)^2$, telle que

$$U_{h_i} = \tilde{f}^1_{u_i}\ ,\ \nu\cdot\nabla U_{h_i} = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Soit d'ailleurs $u_0 = (u_{01}, u_{02}) \in H^1(\Omega)^2$ avec $u_{oi} = f^1_{u_i}$ sur Γ_u ; finalement, on se donne $f^2_{u_1}, f^2_{u_2} \in L^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma_\psi))$, $\Phi \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $N \in C(0,T;L^2(\Omega))$ et $\kappa > 0$.

Posons

$$V = \{v \mid v \in H^1(\Omega),\ v=0 \text{ sur } \Gamma_u\}\ ,$$

$$W = \{v \mid v \in L^2(0,T;H^1(\Omega)),\ \frac{dv}{dt} \in L^2(0,T;V')\} =$$

$$= L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;V'),$$

$$\mathcal{V} = V^2,\ \mathcal{W} = W^2 \text{ et } \mathcal{H} = L^2(\Omega)^2,$$

avec $V' \equiv$ dual de V et la dérivée précédente comprise au sens des distributions à valeurs vectorielles (dans V') sur $(0,T)$.

Un produit scalaire hibertien sur V, équivalent à celui qui y est induit par $H^1(\Omega)$, est donné par :

(2.0) $$(u,v)_V = (\nabla u, \nabla v).$$

En principe, on est intéressé à la résolution de :

(2.1) $$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nabla\cdot(P_1(\nabla\psi)\nabla u_1) - \nabla\cdot(P_1(\nabla\psi)u_1\nabla\psi) + h(u_1,u_2,\nabla\psi) - R(u_1,u_2) + \Phi\ ,$$

(2.2) $$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \nabla\cdot(P_2(\nabla\psi)\nabla u_2) + \nabla\cdot(P_2(\nabla\psi)u_2\nabla\psi) + h(u_1,u_2,\nabla\psi) - R(u_1,u_2) + \Phi,\ \underline{\text{et}}$$

(2.3) $\kappa\Delta\psi = N+u_2-u_1$ dans $\Omega\times(0,T)$,

(2.4) $u_1(x,0) = u_{01}(x)$, $u_2(x,0) = u_{02}(x)$ dans Ω,

(2.5) $u_1 = f^1_{u_1}$, $u_2 = f^1_{u_2}$, $\psi = f^1_\psi$ sur $\Gamma_u\times(0,T)$,

(2.6) $\nu\cdot\nabla\psi = f^2_\psi$, $\nu\cdot(\nabla u_1-u_1\nabla\psi) = f^2_{u_1}$, $\nu\cdot(\nabla u_2+u_2\nabla\psi) = f^2_{u_2}$ sur $\Gamma_\psi\times(0,T)$.

Dans la version simplifiée du problème (2.1)-(2.6) les fonctions $f^2_{u_1}$ et $f^2_{u_2}$ de (2.6) sont connues, tandis que pour le problème non simplifié, que nous considérerons dans la Section 2.4, ces fonctions ne sont pas données "a priori", et elles peuvent s'exprimer en termes des traces de u_1 et u_2 sur Γ_ψ (voir dans la Section 1.1 les conditions à l'interface $S_i-S_iO_2$).

Les équations (2.1) et (2.2) semblent ne pas vérifier les hypothèses de coercivité qu'on espère avoir dans un problème parabolique bien posé. C'est pour cela que nous allons plutôt considérer un problème "réduit", ou "avec des contraintes", où (2.3) sera remplacée par une certaine inéquation variationnelle.

Pour l'instant notons que si

$$U = (u_1,u_2)\in L^2(0,T;\mathcal{V})\cap H^1(0,T;\mathcal{H})$$

et

$$\psi\in L^2(0,T;H^1(\Omega))$$

sont des solutions de

$$(2.1')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \nabla\cdot(P_1(\nabla\psi)\nabla u_1)-\nabla\cdot(P_1(\nabla\psi)u_1\nabla\psi)+h(u_1+U_{h_1},u_2+U_{h_2},\nabla\psi)-R(u_1+U_{h_1},u_2+U_{h_2})+ \\ +\nabla\cdot\{P_1(\nabla\psi)(\nabla U_{h_1}-U_{h_1}\nabla\psi)\}+\Phi, \end{cases}$$

$$(2.2')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = \nabla\cdot(P_2(\nabla\psi)\nabla u_2)+\nabla\cdot(P_2(\nabla\psi)u_2\nabla\psi)+h(u_1+U_{h_1},u_2+U_{h_2},\nabla\psi)-R(u_1+U_{h_1},u_2+U_{h_2})+ \\ +\nabla\cdot\{P_2(\nabla\psi)(\nabla U_{h_2}+U_{h_2}\nabla\psi)\}+\Phi \text{ , et} \end{cases}$$

(2.3') $\quad -\kappa\Delta\psi = N+U_{h_2}-U_{h_1}+u_2-u_1$ <u>dans</u> $\Omega\times(0,T)$,

(2.4') $\quad u_1(x,0) = u_{01}(x)-U_{h_1}(x),\ u_2(x,0) = u_{02}(x)-U_{h_2}(x)$ <u>dans</u> Ω,

(2.5') $\quad u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ \psi = f^1_\psi$ <u>sur</u> $\Gamma_u\times(0,T)$,

(2.6') $\quad \nu\cdot\nabla\psi = f^2_\psi\ ,\ \nu\cdot(\nabla u_1-u_1\nabla\psi) = f^2_{u_1},\ \nu\cdot(\nabla u_2+u_2\nabla\psi) = f^2_{u_2}$ <u>sur</u> $\Gamma_\psi\times(0,T)$,

alors

$$\tilde{U} = (\tilde{u}_1,\tilde{u}_2) = (u_1+U_{h_1},u_2+U_{h_2})$$

et ψ sont des solutions de (2.1)-(2.6).

2.2. - <u>Le Problème Réduit Simplifié</u>

Comme nous avons déjà indiqué, on va maintenant considérer un problème "réduit", correspondant à la situation physique envisagée lorsque l'on impose une "condition de sécurité" au potentiel électrostatique.

<u>On se donne alors une constante</u> $\Psi > o$, <u>et on suppose qu'il existe</u> ϕ^* <u>telle que</u> :

(2.7)
$$\phi^* \in H^2(\Omega)\ ,\quad \nabla\phi^* \in L^\infty(\Omega)^N\ ,\ |\nabla\phi^*(x)| \le \Psi \ \underline{\text{p.p. dans}}\ \Omega\ ,^{(*)}$$
$$\phi^* = f^1_\Psi\ \underline{\text{sur}}\ \Gamma_u,\quad \nu\cdot\nabla\phi^* = o\ \underline{\text{sur}}\ \Gamma_\Psi\ .$$

Soit $\omega \in L^2(\Omega)$, et posons

(2.8) $\quad K = \{\phi/\phi \in H^1(\Omega)\ ,\ \phi = f^1_\Psi\ \underline{\text{sur}}\ \Gamma_u,\ |\nabla\phi(x)| \le \Psi\ \underline{\text{p.p. dans}}\ \Omega\}$.

Grâce à l'existence de ϕ^*, $K \neq \emptyset$. D'ailleurs, K est un convexe fermé de $H^1(\Omega)$ qui vérifie

(2.9a) $\quad K \subset \phi^* + K_o$,

avec

(2.9b) $\quad K_o = \{\phi/\phi \in V\ ,\ |\nabla\phi(x)| \le 2\,\Psi$ p.p. dans $\Omega\}$.

Il s'agit aussi d'un ensemble borné dans $H^1(\Omega)$. En effet, supposons que

$$\phi_n \in K\ ,\ \|\phi_n\| \to +\infty\ ;$$

évidemment, $|\phi_n| \to +\infty$. Alors, si $R > 0$, il existera $n \ge 1$ tel que

(*) Cf la Remarque 2.2.

$R < |\phi_n|$. Mais, d'après (2.9), ϕ_n peut être écrit de la forme $\phi* + \phi_{on}$, où $\phi_{on} \in V$, et donc

$$R < |\phi_n| \leq |\phi*| + |\phi_{on}| \leq |\phi*| + 2c\Psi ,$$

pour une constante $c > o$ qui ne dépend que de Ω. Comme $R > 0$ est arbitraire, on arrive à un absurd, et donc K est borné.

La fonctionnelle d'énergie potentielle

$$J_P(\phi) = \frac{\kappa}{2} (\nabla\phi,\nabla\phi) - (\omega,\phi) - \kappa < \tilde{f}^2_\psi,\gamma_o\phi >, \ \phi \in H^1(\Omega) ,$$

(où $<.,.>$ est la dualité $H^{-1/2}(\Gamma)$, $H^{1/2}(\Gamma)$) étant convexe et s.c.i. sur $H^1(\Omega)$, il en résulte que J_P possède un minimun ψ sur K. Mais J_P est aussi strictement convexe sur K, car si $\phi_1,\phi_2 \in K$ et $|\nabla\phi_1-\nabla\phi_2| = 0$, alors $\phi_1=\phi_2$, d'où le problème

$$(\mathcal{P}_P) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \psi \in K, \text{ tel que :} \\ \kappa(\nabla\psi,\nabla\phi - \nabla\psi) \geq (\omega,\phi - \psi) + \kappa < \tilde{f}^2_\psi,\gamma_o\phi - \gamma_o\psi >, \ \forall\psi \in K , \end{cases}$$

admet une solution unique (cf EKELAND-TEMAM [4], pour détails).

Remarque 2.1. : L'application $\omega \to \psi$, qui à chaque $\omega \in L^2(\Omega)$ associe la solution du correspondant problème $(\mathcal{P}_P)$, est continue et bornée de $L^2(\Omega) \to K$. En effet, pour ω^1, $\omega^2 \in L^2(\Omega)$, $\omega^1 \to \psi^1$ et $\omega^2 \to \psi^2$, on a

$$o \leq |\nabla\psi_1-\nabla\psi_2|^2 = -(\nabla\psi_1,\nabla\psi_2 - \nabla\psi_1) - (\nabla\psi_2,\nabla\psi_1 - \nabla\psi_2) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\kappa}(\omega_1,\psi_1 - \psi_2) - \frac{1}{\kappa}(\omega_2,\psi_1 - \psi_2) = \frac{1}{\kappa}(\omega_1 - \omega_2, \psi_1 - \psi_2) \leq$$

$$\leq C\ |\omega_1 - \omega_2|\cdot|\nabla\psi_1 - \nabla\psi_2|,$$

et donc, pour une constante $C' > 0$, on a

$$\|\psi_1 - \psi_2\| \leq C'|\omega_1 - \omega_2|. \tag{2.10}$$

En fait, on obtient que cette application est lipschizienne. ∎

Remarque 2.2. : Supposons que $\tilde{f}^1_\psi \in H^{r-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, où r est $\geq$ le plus petit entier $> 1 + N/2$. Alors, à l'aide des théorèmes de Traces, on peut trouver une fonction $\phi* \in H^r(\Omega)$ telle que $\phi* = f^1_\psi$ sur Γ_ψ, et $\nu\cdot\nabla\phi* = o$ sur Γ_ψ. D'après l'injection de Sobolev, on aura d'ailleurs

$$\nabla\phi* \in H^{r-1}(\Omega)^N \subsetneq \mathcal{C}^o(\bar{\Omega})^N \subsetneq L^\infty(\Omega)^N. \ ∎$$

Dans la suite, on utilisera la notation suivante :

$$b(u_1,u_2,\nabla\psi)\equiv h(u_1 + U_{h_1}, u_2 + U_{h_2},\nabla\psi) - R(u_1 + U_{h_1}, u_2 + U_{h_2}) + \Phi$$
$$Q_1(\nabla\psi)\equiv P_1(\nabla\psi)(\nabla U_{h_1} - U_{h_1}\nabla\psi),\ Q_2(\nabla\psi)\equiv P_2(\nabla\psi)(\nabla U_{h_2} + U_{h_2}\nabla\psi).$$

L'espace $\mathcal{V} = V^1$ étant séparable, il possède un "base topologique" $\{\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^m,\ldots\}$, $\omega^j = (\omega_1^j,\omega_2^j)$.

On cherche alors, pour chaque $m \geq 1$, la solution $U_m = (u_{m1},u_{m2})$ du système différentiel ordinaire :

$$(2.11a)\quad \begin{cases} (U_m'(t),\omega^j) + (P_1(\nabla\psi_m(t))\nabla u_{m1}(t),\nabla\omega_1^j) + (P_2(\nabla\psi_m(t))\nabla u_{m2}(t),\nabla\omega_2^j) = \\ = (P_1(\nabla\psi_m(t))u_{m1}(t)\nabla\psi_m(t),\nabla\omega_1^j) - (P_2(\nabla\psi_m(t))u_{m2}(t)\nabla\psi_m(t),\nabla\omega_2^j) \\ - (Q_1(\nabla\psi_m(t)),\nabla\omega_1^j) - (Q_2(\nabla\psi_m(t)),\nabla\omega_2^j) + (b(u_{m1}(t)),u_{m2}(t),\nabla\psi_m(t) , \\ \omega_1^j + \omega_2^j) + < f_{u_1}^2(t),\omega_1^j >_\psi + < f_{u_2}^2(t),\omega_2^j >_\psi ,\ 1 \leq j \leq m , \end{cases}$$

avec les conditions initiales

$$(2.11b)\quad \begin{cases} u_{m1}(o) = \mathcal{U}_{m10} \to u_{o1} - U_{h_1} \text{ dans } V, \mathcal{U}_{m10} \in [\omega_1^1,\omega_1^2,\ldots,\omega_1^m] , \\ u_{m2}(o) = \mathcal{U}_{m20} \to u_{o2} - U_{h_2} \text{ dans } V, \mathcal{U}_{m20} \in [\omega_2^1,\omega_2^2,\ldots,\omega_2^m] , \end{cases}$$

et où $<.,.>_\psi$ désigne la dualité $H^{-1/2}(\Gamma_\psi),H^{1/2}(\Gamma_\psi)$(*), et où $\psi_m(t)$ est, pour tout t, la solution de

$$(2.11c)\quad \begin{cases} \kappa(\nabla\psi_m(t),\nabla\phi - \nabla\psi_m(t)) \geq (N + U_{h2} - U_{h1} + u_{m2}(t) - u_{m1}(t),\phi - \psi_m(t) + \\ + \kappa < \tilde{f}_\psi^2,\phi - \psi_m(t) > ,\ \forall\phi \in K,\ \psi_m(t) \in K. \end{cases}$$

Posons $u_{m_1} = \sum_{i=1}^m \xi_i^m\ \omega_1^i$, $u_{m2} = \sum_{i=1}^m \eta_i^m\ \omega_2^i$. D'après les hypothèses précédentes, et compte tenu de la remarque 2.1, la fonction $(\xi^m,\eta^m) \to \nabla\psi_m$ sera continue, et le système (2.11) aura une solution au voisinage de O.

2.2.1. - Estimations "a priori" (I)

On déduit de (2.11)

(*) Par simplicité, on n'a pas écrit dans (2.11a) $< f_{u_i}^2(t),\beta\gamma_o\omega_i^j >$, avec $\beta \equiv$ restriction cannonique de $H^{1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma_\psi)$

$$
\begin{aligned}
&(u'_{m1}(t),u_{m1}(t)) + (u'_{m2}(t),u_{m2}(t)) \\
&+ (P_1(\nabla\psi_m(t))\nabla u_{m1}(t),\nabla u_{m1}(t)) + P_2(\nabla\psi_m(t))\nabla u_{m2}(t),\nabla u_{m2}(t)) \\
&= (P_1(\nabla\psi_m(t))u_{m1}(t)\nabla\psi_m(t),\ \nabla u_{m1}(t)) - (P_2(\nabla\psi_m(t))u_{m2}(t)\nabla\psi_m(t),\nabla u_{m2}(t)) \\
&- (Q_1(\nabla\psi_m(t)),\nabla u_{m1}(t)) - (Q_2(\nabla\psi_m(t)),\nabla u_{m2}(t)) + (b(u_{m1}(t),u_{m2}(t),\nabla\psi_m(t)),u_{m1}(t)+u_{m2}(t)) \\
&+ < f^2_{u_1}(t),u_{m1}(t) >_\psi + < f^2_{u_2}(t),u_{m2}(t) >
\end{aligned}
$$

et donc (cf. la Remarque 2.3) :

$$
(2.12)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{m1}(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{m2}(t)|^2 + \alpha_1|\nabla u_{m1}(t)|^2 + \alpha_2|\nabla u_{m2}(t)|^2 \le \\
&\le C_{11}|u_{m_1}(t)||\nabla u_{m_1}(t)| + C_{12}|u_{m_2}(t)||\nabla u_{m_2}(t)| + C_{21}|\nabla u_{m_1}(t)| + C_{22}|\nabla u_{m_2}(t)| \\
&+ C_{31}|u_{m_1}(t)| + C_{32}|u_{m_2}(t)| + C_{41}|u_{m_1}(t)|^2 + C_{42}|u_{m_2}(t)|^2 \\
&+ S_1(t)|\nabla u_{m_1}(t)| + S_2(t)|\nabla u_{m_2}(t)|\ ,
\end{aligned}
\right.
$$

pour certaines constances α_i et C_{ij} positives et <u>indépendantes de m</u>, et pour deux fonctions S_1, S_2 de $L^2(o,T)$ à valeurs $\ge o$.

Il en résulte

$$
(2.12')\quad \left\{
\begin{aligned}
&|u_{m_1}(t)|^2 + |u_{m_2}(t)|^2 + \alpha_1\int_o^t|\nabla u_{m_1}(\sigma)|^2d\sigma + \alpha_2\int_o^t|\nabla u_{m_2}(\sigma)|^2d\sigma \le \\
&\le C_o + C_{51}\int_o^t|u_{m_1}(\sigma)|^2d\sigma + C_{52}\int_o^t|u_{m_2}(\sigma)|^2d\sigma\ ,
\end{aligned}
\right.
$$

et, d'après l'inégalité de Gronwall, <u>il existera une constante</u> $C_6 > o$, <u>indépendante de</u> t <u>et</u> m, <u>telle que</u>

$$|u_{m_1}(t)| \le C_6,\ |u_{m_2}(t)| \le C_6\ .$$

Cela montre que U_m est définie dans tout l'interalle $[o,T]$, et que la suite $\{U_m\}$ peut être choisie d'une façon telle que

(2.13) $\quad U_m$ <u>demeure dans un borné de</u> $L^\infty(o,T;\mathcal{H})$.

Si (2.13) est appliqué dans (2.12'), on obtient aussi :

(2.14) $\quad U_m$ <u>demeure dans un borné de</u> $L^\infty(o,T;\mathcal{V})$.

<u>Remarque 2.3.</u> : L'existence des constantes α_i est claire à partir des définitions des P_i et de K. L'existence des fonctions S_i est fournie par les hypothèses $\Phi \in L^2(o,T;L^2(\Omega))$ et $f^2_{u_i} \in L^2(o,T;H^{-1/2}(\Gamma_\psi))$, et par le fait que, dans V, on a, pour une constante $C > o$, l'inégalité $|u| \le C|\nabla u|$. ■

2.2.2. - Estimations "a priori" (II)

Considérons maintenant l'opérateur

(2.15a) $u \to A_t(u)$, de $\mathcal{V} \to \mathcal{V}'$,

défini par :

(2.15b) $(A_t(u),v) = (P_1(\nabla\psi),\nabla u_1,\nabla v_1) + (P_2(\nabla\psi)\nabla u_2,\nabla v_2)$, $\forall u = (u_1,u_2), v = (v_1, v_2) \in \mathcal{V}$,

où ψ est la solution de $(\mathcal{P}_p)$ pour $\omega = N(t) + u - u$; cet opérateur est continu. En effet, si $u_n, u \in \mathcal{V}$, et $u_n \to u$, on a

$$|(A_t(u_n) - A_t(u),v)| \leq \sum_{i=1}^{2} \{|((P_i(\nabla\psi_n) - P_i(\nabla\psi))\nabla u_{ni}, v_i)| +$$

$$+ |(P_i(\nabla\psi)(\nabla u_{ni} - \nabla u_i),\nabla v_i)| \text{ , } \forall v = (v_1, v_1) \in \mathcal{V} \text{ ;}$$

mais dans cette expression, le deuxième terme est majoré par

$$g_{1i}|\nabla u_{ni} - \nabla u_i|\cdot|\nabla v_i| \text{ ,}$$

tandis que l'Inverse du Théorème de Lebesgue (cf. BOURBAKI [5]) entraine l'existence d'une fonction $f \in L^2(\Omega)$, telle que $|u_{ni}| \leq f$ p.p. dans Ω, $\forall n \geq 1$. On a donc

$$|((P_i(\nabla\psi_n) - P_i(\nabla\psi))\nabla u_{ni},\nabla v_i)| \leq \int_\Omega f|P_i(\nabla\psi_n) - P_i(\nabla\psi)||\nabla v_i|dx$$

$$\leq (\int_\Omega |\nabla v_i|^2 dx)^{1/2}(\int_\Omega f^2|P_i(\nabla\psi_n) - P_i(\nabla\psi)|^2 dx)^{1/2},$$

d'où il existe une constante $C_7 > o$, telle que

$$\frac{|(A_t(u_n) - A_t(u),v)|}{||v||} \leq C_7\{g_{11}|\nabla u_{n1} - \nabla u_{n1}| + g_{12}|\nabla u_{n2} - \nabla u_2| +$$

$$+ (\int_\Omega f^2|P_1(\nabla\psi_n) - P_1(\nabla\psi)|^2 dx)^{1/2} + (\int_\Omega f^2|P_2(\nabla\psi_n) - P_2(\nabla\psi)|^2 dx)^{1/2}\},$$

et comme $P_i \leq g_i$, et que $P_i(\nabla\psi_n) \to P_i(\nabla\psi)$ p.p. dans Ω (en prenant une sous-suite, s'il le faut), on déduit finalement la continuité de l'opérateur A_t.

Remarque 2.4. : En fait, on a aussi la continuité de cet opérateur de $\mathcal{V} \to L^2(\Omega)^N \times L^2(\Omega)^N$. ∎

Evidemment, on peut trouver une constante $a > o$ (indépendante de t), telle que

(2.15c) $||A_t(u)||_{\mathcal{V}'} \leq a||u||$, $\forall u \in \mathcal{V}$.

On peut aussi bien construire les opérateurs continus

(2.16a) $\quad u \to M_t(u)$, de $\mathcal{V} \to \mathcal{V}'$,

(2.17a) $\quad u \to Q_t(u)$, de $\mathcal{V} \to \mathcal{V}'$,

avec

(2.16b) $\quad (M_t(u),v) = (P_1(\nabla\psi)u_1\nabla\psi,\nabla v_1) - (P_2(\nabla\psi)u_2\nabla\psi,\nabla v_2)$,

et

(2.17b) $$(Q_t(u),v) = -(Q_1(\nabla\psi),\nabla v_1) - (Q_2(\nabla\psi),\nabla v_2) + (b(u_1,u_2,\nabla\psi),v_1 + v_2) + \\ + \langle f^2_{u_1}, v_1\rangle_\psi + \langle f^2_{u_2}, v_2\rangle_\psi ,$$

pour $u = (u_1,u_1)$, $v = (v_1,v_1) \in \mathcal{V}$, et ψ définie comme précédement ; on peut encore trouver des constantes m, q et q' > o (indépendantes de t), telle que

(2.16c) $\quad \|M_t(u)\|_{\mathcal{V}'} \le m\|u\|$, $\forall u \in \mathcal{V}$.

et

(2.17c) $\quad \|Q_t(u)\|_{\mathcal{V}'} \le q\|u\| + q'$, $\forall u \in \mathcal{V}$.

L'injection de $\mathcal{V} \to \mathcal{H}$ étant compacte (cf. KONDRACHOFF [6]), le problème spectral

(2.18) $\quad (\omega,v)_{\mathcal{V}} = \lambda(\omega,v)$, $\forall v \in \mathcal{V}$, $\omega \in \mathcal{V}$, $\lambda > o$,

admettra une suite de solutions non trivalles ω^j, de valeurs propres associées $\lambda_j > o$, qui constitueront une base orthogonale de $\mathcal{V}$:

$$(\omega^j,\omega^k) = \lambda_j^{-1}\delta_{jk} , \quad (\omega^j,\omega^k) = \delta_{jk}.$$

Si dans (2.11) on a choisi cette base, et P_m dénote l'opérateur projection orthogonale de $\mathcal{H} \to [\omega^1,\omega^2,\dots,\omega^m] \equiv$ espace engendré par les $\omega^j, 1 \le j \le m$, on peut écrire

(2.19) $\quad U'_m(t) = P^*_m [- A_t(U_m(t)) + M_t(U_m(t)) + Q_t(U_m(t))]$,

d'après (2.11) et le résultat suivant :

Lemme 2.3. : "Dans les conditions précédentes, si $v' \in \mathcal{V}'$, $v \in [\omega^1,\omega^2,\dots,\omega^m]$ et $(v,\omega_j) = (v',\omega_j)$, $\forall_j = 1,2,\dots,m$, alors $v = P^*_m v'$. "

Démonstration

L'opérateur P^*_m étant défini (d'après l'identification usuelle de $\mathcal{H}$ avec son espace dual) de $\mathcal{V}' \to \mathcal{H}$, il suffira de montrer que

$$(v,h) = (v',P_m h) \quad , \forall h \in \mathcal{H} ;$$

mais, pour $h \in \mathcal{H}$, on a

$$P_m h = \sum_{j=1}^{m} (\mathrm{proj}_{\mathcal{V}}(h), \lambda_j^{-1/2}\omega^j)_{\mathcal{V}}\ \lambda_j^{-1/2}\omega^j = \sum_{j=1}^{m} (h,\omega^j)\omega^j ,$$

d'où

$$(v',P_m h) = \sum_{j=1}^{m} (h,\omega^j)(v',\omega^j) = \sum_{j=1}^{m} (h,\omega^j)(v,\omega^j) = (v, \sum_{j=1}^{m} (h,\omega^j)\omega^j) = (v,P_m h),$$

et, comme $v \in [\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^m]$, ce dernier terme est égal à (v,h), d'où le résultat. ∎

D'autre part, $\|P_m^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V}';\mathcal{H})} = \|P_m\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V};\mathcal{H})}$; mais, pour chaque $h \in \mathcal{H}$,

$$\|P_m h\|^2 = \|\sum_{j=1}^{m} (h,\omega^j)\omega^j\|^2 = \sum_{j=1}^{m} |(h,\omega^j)|^2\lambda_j^{-1} \leq \tau^2 \sum_{j=1}^{m} |(h,\omega^j)|^2 \leq \tau^2|h|^2 ,$$

pour une constante $\tau^2 > o$ qui ne dépend que des espaces $\mathcal{H}$ et $\mathcal{V}$. Donc, $\|P_m^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V}';\mathcal{H})} \leq \tau$, et de (2.15c),(2.16c),(2.17c) et (2.19), on obtient :

(2.20) U'_m <u>demeure dans un borné de</u> $L^2(o,T;\mathcal{V}')$.

On a donc, pour une sous-suite U_μ et une fonction $U \in L^2(o,T;\mathcal{V}) \cap H^1(o,T;\mathcal{V}')$,

les relations suivantes :

(2.21) $U_\mu \to U$ <u>dans</u> $L^\infty(o,T;\mathcal{H})$ - <u>faible étoile</u>,

(2.22) $U_\mu \to U$ <u>dans</u> $L^2(o,T;\mathcal{V})$ - <u>faible</u>,

(2.23) $U_\mu \to U$ <u>dans</u> $L^2(o,T;\mathcal{H})$ - <u>fort, et p.p. dans</u> $\Omega \times (o,T)$,

(2.24) $U'_\mu \to U'$ <u>dans</u> $L^2(o,T;\mathcal{V}')$ - <u>faible</u>

(On déduit (2.24) de (2.20) et du fait que $U_\mu \to U$ dans $L\ (o,T;\mathcal{V})$ - faible entraine $U'_\mu \to U'$ dans $\mathcal{D}'(o,T;\mathcal{V}')$; on déduit (2.23) de la compacité de l'injection $\mathfrak{W} \hookrightarrow L^2(o,T;\mathcal{H})$.)

<u>Remarque 2.5.</u> : Chaque $U_m \in \mathfrak{W}$; elle est donc (sauf modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle) continue de $[o,T] \to \mathcal{H}$. On aura donc pour chaque fonction $t \to \psi_m(t)$ la continuité de $[o,T] \to H^1(\Omega)$. En fait, on peut prouver que l'opérateur $U \to \psi_U(t)$ où $\psi_u(t)$ est la solution de (P_p) pour $\omega = N(t) + U_{h_2} - U_{h_1} + u_2(t) - u_1(t)$ et $t \in [o,T]$, est continu de $\mathfrak{W} \to C(o,T;H^1(\Omega))^{(*)}$; en outre, la convergence des U_μ vers U dans $L^2(o,T;\mathcal{H})$ (cf. (2.23)) implique la convergence des correspondantes ψ_μ vers ψ dans $L^2(o,T;H^1(\Omega))$ - fort, où ψ est la solution de :

(*) Ce résultat n'est pas peut-être optimale.

$$(2.23')\qquad \kappa(\nabla\psi(t),\nabla\phi - \nabla\psi(t)) \geq (N(t) + U_{h_2} - U_{h_1} + u_2(t) - u_1(t),\phi - \psi(t)) + \\ + \kappa < \tilde{f}^2_\psi,\gamma_o\phi - \gamma_o\psi(t) > ,\forall\phi \in K,\psi(t) \in K,t \in [o,T] .$$

Considérons d'abord les termes

$(u'_\mu(t),\omega^j_1) + u'_{\mu 2}(t),\omega^j_2)$ avec $\mu \geq j$;

il est clair que ces termes convergent vers

$(u'_1(t),\omega^j_1) + (u'_2(t),\omega^j_2)$ p.p. dans $[o,T]$,

compte tenu de (2.24).

D'ailleurs, d'après (2.23'), il existe une sous-suite $\{\psi_\lambda\}$ de $\{\psi_\mu\}$, telle que $\nabla\psi_\lambda(t) \to \nabla\psi(t)$ dans $L^2(\Omega)^N$ p.p. dans $[o,T]$, et donc le Théorème de Lebesgue appliqué aux intégrales

$$(2.25)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_\Omega |g|^2|\nabla\omega^j_1|^2|\frac{1}{(1+|\frac{\nabla\psi_\lambda(t)\cdot\vec{e}_1}{a_1}|)\ldots\ldots(1+|\frac{\nabla\psi_\lambda(t)\cdot\vec{e}_N}{d_N}|^\beta)^{1\beta}} - \\ &- \frac{1}{(1+|\frac{\nabla\psi(t)\cdot\vec{e}_1}{a_1}|)\ldots\ldots(1+|\frac{\nabla\psi(t)\cdot\vec{e}_N}{d_N}|^\beta)^{1\beta}}|^2dx , \end{aligned}\right.$$

entraine la convergence des $P_1(\nabla\psi_\lambda(t))\nabla\omega^j_1$ vers $P_1(\nabla\psi(t))\nabla\omega^j_1$ dans $L^2(\Omega)^N$ p.p. dans $[o,T]$, d'où

(2.26) $\quad (P_1(\nabla\psi_\lambda(t))\nabla u_{\lambda_1}(t),\nabla\omega^j_1) \to (P_1(\nabla\psi(t))\nabla u_1(t),\nabla\omega^j_1)$ <u>p.p. dans</u> $[o,T]$.

De même, on peut trouver une sous-suite (encore appelée $\{U_\lambda\}$), telle que

(2.26') $\quad (P_2(\nabla\psi_\lambda(t))\nabla u_{\lambda_2}(t),\nabla\omega^j_2) \to (P_2(\nabla\psi(t))\nabla u_2(t),\nabla\omega^j_2)$ <u>p.p. dans</u> $[o,T]$,

(2.27) $\quad (P_i(\nabla\psi_\lambda(t))u_{\lambda i}(t)\,\nabla\psi_\lambda(t),\ \omega^j_i) \to (P_i(\nabla\psi(t))u_i(t)\nabla\psi(t),\nabla\omega^j_i)$, $i = 1,2$, <u>p.p. dans</u> $[o,T]$,

(2.28) $\quad (Q_i(\nabla\psi_\lambda(t)),\nabla\omega^j_i) \to (Q_i(\nabla\psi(t)),\nabla\omega^j_i)$, $i = 1,2$, <u>p.p. dans</u> $[o,T]$,

et

(2.29) $\quad (b(u_{\lambda_1}(t),u_{\lambda_2}(t),\nabla\psi_\lambda(t)),\omega^j_1 + \omega^j_2) \to (b(u_1(t),u_2(t),\nabla\psi(t)),\omega^j_1 + \omega^j_2)$ <u>p.p. dans</u> $[o,T]$.

La fonction U vérifie alors :

$U \in L^\infty(o,T;\mathcal{H}) \cap L^2(o,T;\mathcal{V}) \cap H^1(o,T;\mathcal{V}')$, et

$$(2.30)\quad \begin{cases} (U'(t),v) + (P_1(\nabla\psi(t))\nabla u_1(t),\nabla v_1) + P_2(\nabla\psi(t))\nabla u_2(t),\nabla v_2) = \\ = (P_1(\nabla\psi(t))u_1(t)\nabla\psi(t),\nabla v_1) - (P_2(\nabla\psi(t))u_2(t)\nabla\psi(t),\nabla v_2) + \\ \qquad + (b(u_1(t),u_2(t),\nabla\psi(t),v_1 + v_2) \\ - (Q_1(\nabla\psi(t)),\nabla v_1) - (Q_2(\nabla\psi(t)),\nabla v_2) + < f^2_{u_1},\gamma_\circ v_1 >_\psi + < f^2_{u_2},\gamma_\circ v_2 >_\psi \\ \forall v = (v_1,v_2) \in \mathcal{V}, \ \underline{\text{p.p. dans}} \ [o,T] \ (\underline{\text{par continuité}}) , \end{cases}$$

d'où on déduit, de façon classique :

$$(2.31)\quad \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \nabla\cdot(P_1(\nabla\psi)\nabla u_1) - \nabla\cdot(P_1(\nabla\psi)u_1\nabla\psi) + h(u_1 + U_{h_1}, u_2 + U_{h_2},\nabla\psi) - \\ - R(u_1 + U_{h_1},u_2 + U_{h_2}) + \Phi + \nabla\cdot(P_1(\nabla\psi)(\nabla U_{h_1} - U_{h_1}\nabla\psi)) , \\ \underline{\text{dans}} \ \Omega \times (o,T) , \end{cases}$$

$$(2.32)\quad \begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial t} = \nabla\cdot(P_2(\nabla\psi)\nabla u_2) + \nabla\cdot(P_2(\nabla\psi)u_2\nabla\psi) + h(u_1 + U_{h_1},u_2 + U_{h_2},\nabla\psi) - \\ - R(u_1 + U_{h_1},u_2 + U_{h_2}) + \Phi + \nabla\cdot(P_2(\nabla\psi)(\nabla U_{h_2} + U_{h_2}\nabla\psi)), \\ \underline{\text{dans}} \ \Omega \times (o,T) , \end{cases}$$

$$(2.33)\quad u_1(x,o) = u_{01}(x) - U_{h_1}(x) , \ u_2(x,o) = u_{02}(x) - U_{h_2}(x) \ \text{ dans } \Omega \ ^{(*)},$$

$$(2.34)\quad u_1 = o, \ u_2 = o, \ \psi = f^1_\psi \ \text{ sur } \ \Gamma_u \times (o,T).$$

D'ailleurs, le choix de $v = (v_1,v_2) \in \mathcal{V}$ arbitraire, la définition de K, (2.30),(2.31) et (2.32) entrainent :

$$\begin{cases} \nu\cdot(\nabla u_1 - u_1\nabla\psi) = \nu\cdot(\nabla U_{h_1} - U_{h_1}\nabla\psi) + f^2_{u_1} = f^2_{u_1} , \\ \nu\cdot(\nabla u_2 + u_2\nabla\psi) = \nu\cdot(\nabla U_{h_2} + U_{h_2}\nabla\psi) + f^2_{u_2} = f^2_{u_2} , \\ \text{sur } \Gamma_\psi \times (o,T). \end{cases}$$

On a donc démontré le résultat d'existence suivant :

Théorème 2.1. : "Avec les notations et les hypothèses précédentes, il existe une solution $\tilde{U} = (\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)$ du problème

---

(*) Noter par exemple que $u_1 \in \mathcal{W} \quad C(o,T;L^2(\Omega))$, et $\mathcal{U}_{m01} \to u_{01} - U_{h_1}$ dans V, donc dans $L^2(\Omega)$.

$$\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t} = \nabla\cdot(P_1(\nabla\psi)\nabla\tilde{u}_1) - \nabla\cdot(P_1(\nabla\psi)\tilde{u}_1\nabla\psi) + h(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\nabla\psi) - R(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2) + \Phi ,$$

(2.35) $$\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial t} = \nabla\cdot(P_2(\nabla\psi)\nabla\tilde{u}_2) + \nabla\cdot(P_2(\nabla\psi)\tilde{u}_2\nabla\psi) + h(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\nabla\psi) - R(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2) + \Phi ,$$

<u>dans</u> $\Omega \times (o,T)$,

(2.36) $$\kappa(\nabla\psi(t),\nabla\phi - \nabla\psi(t)) \geq (N(t) + \tilde{u}_2(t) - \tilde{u}_1(t),\phi - \psi(t)) + \kappa < \tilde{f}^2_\psi,\gamma_o\phi - \gamma_o\psi(t) >$$

$\forall\phi \in K,\psi(t) \in K,t \in [o,T]$

<u>ou bien, de façon équivalente,</u>

(2.36') $J_p(t;\psi(t)) = \inf J_p(t;\phi),\psi \in K,t \in [o,T])$,

$\tilde{u}(o) = u_{01}$, $\tilde{u}_2(o) = u_{02}$ <u>dans</u> Ω ,

$\tilde{u}_1 = f^1_{u_1},\tilde{u}_2 = f^1_{u_2},\psi = f^1_\psi$ <u>sur</u> $\Gamma_u \times (o,T)$,

$\nu\cdot(\nabla\tilde{u}_1 - \tilde{u}_1\nabla\psi) = f^2_{u_1}$, $\nu\cdot(\nabla\tilde{u}_2 + \tilde{u}_2\nabla\psi) = f^2_{u_2}$ sur $\Gamma_\psi \times (o,T)$" . ∎

2.3. - <u>Le Problème Réduit non Simplifié</u>

On va maintenant considérer un problème plus compliqué, correspondant au cas où les fonctions $f^2_{u_i}$ de la section précédente ne sont pas connues mais elles sont données en fonction des traces des fonctions u_1 et u_2 sur Γ_ψ (les considérations qui suivent correspondent dans le problème de la Section (1.1.) au cas dont les concentrations d'électrons et de trous ne sont pas connues sur l'interface Si - SiO_2).

Supprimons donc les hypothèses concernantes aux fonctions $\tilde{f}^2_{u_i}$ de la Section (2.1.), et supposons que toutes les autres hypothèses sont remplies. Dans la suite, on utilisera aussi les résultats suivants :

<u>Lemme 2.4.</u> : "<u>Pour tout</u> $\varepsilon > o$, <u>il existe</u> $c_\varepsilon > o$, <u>tel que</u> :

(2.37) $$\|u|_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)} \leq \varepsilon|\nabla u| + c_\varepsilon|u| , \forall u \in V. "$$

<u>Démonstration</u>

Supposons qu'il existe $\varepsilon > o$ tel que, pour une suite $\{u_n\}$, $u_n \in V$, et pour des constantes c_n, $c_n \to +\infty$, on ait :

(2.38) $$\|u_n|_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)} > \varepsilon|\nabla u_n| + c_n|u_n|, \forall n \geq 1.$$

Alors, si on pose $v_n = u_n/|\nabla u_n|$ ($|\nabla u_n| > o$, car d'après (2.38), $u_n|_\Gamma \neq o$, et $u_n \in V$), on obtient

(2.39) $\quad \|v_n|_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)} > \varepsilon + c_n|v_n|, \ \forall n \geq 1,$

et

$$\|v_n|_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)} \leq (\text{cte.})|\,v_n| \equiv \text{cte.}$$

Il en résulte $|v_n| \to o$. Mais, d'autre part, il existe une sous-suite $\{v_\mu\}$ de $\{v_n\}$ telle que $v_\mu \to v_*$ dans $H^1(\Omega)$-faible. Cela entraine nécessairement $v_* = o$, et comme $v_\mu|_\Gamma \to v_*|_\Gamma$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$-faible, et donc dans $L^2(\Gamma)$-fort, on obtient avec (2.39) la contradiction. ∎

Remarque 2.6. : Ce résultat n'est pas optimal. En fait, (2.37) est vrai pour tout $u \in H^1(\Omega)$. Une inégalité similaire peut être aussi bien obtenue avec la norme $\|\cdot\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$. ∎

Remarque 2.7 : Dans la démonstration précédente, on a utilisé les deux résultats suivants :

(i) "Si $T \in \mathcal{L}(E;F)$, E et F étant des espaces de Banach, l'opérateur T est aussi continu de E-faible dans F-faible (cf., par exemple, HORWATH [7]).

(ii) "Les injections $H^s(\Gamma) \subset H^{s'}(\Gamma)$ (et $H^s(\mathcal{O}) \subset H^{s'}(\mathcal{O})$ en général, $\mathcal{O}$ étant une variété différentiable), $s > s'$, sont complètement continues". ∎

On va dans la suite considérer aussi des fonctions $\xi \to R^i_\Gamma(\xi)$, $i=1,2$, continues de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ vérifiant :

$$\exists\, c > 0, \text{ telle que } |R^i_\Gamma(\xi)| \leq C(1+|\xi_1|+|\xi_2|), \ \forall \xi = (\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2, \ i=1,2.$$

Comme dans (2.1), on peut montrer sans peine :

Lemme 2.5 : "Les opérateurs de composition $\xi \to R^i_\Gamma(\xi)$ sont continus et bornés de $L^2(\Gamma)^2 \to L^2(\Gamma)$. Il s'agit aussi d'opérateurs continus, bornés et même compacts de $H^{1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma)$. ∎

Dans les exemples typiques fournis par la Théorie des Semiconducteurs, on prendra

$$R^i_\Gamma(\xi_1,\xi_2) = (-1)^i \eta_\Gamma \frac{\xi_1^+\xi_2^+ - c_\Gamma^2}{q_{\Gamma,1}\xi_1^+ + q_{\Gamma,2}\xi_2^+ + \tau_\Gamma},$$

avec $c_\Gamma, q_{\Gamma,1}, q_{\Gamma,2}$ et τ_Γ des constantes positives et $\eta_\Gamma \in L^\infty(\Gamma)$.

Nous sommes maintenant en mesure d'aborder le problème "non simplifié". La base orthonormale choisie dans 2.2.2. étant donnée, et avec les notations qui précèdent, on considère, pour chaque $m \geq 1$, la solution du système différentiel ordinaire

$$(2.40a)\quad \begin{cases} (U'_m(t),\omega^j) + (P_1(\nabla\psi_m(t))\nabla u_{m_1}(t),\nabla\omega_1^j) + (P_2(\nabla\psi_m(t)\nabla u_{m_2}(t),\nabla\omega_2^j) = \\ \quad = (P_1(\nabla\psi_m(t))u_{m_1}(t)\nabla\psi_m(t),\nabla\omega_1^j) - (P_2(\nabla\psi_m(t))u_{m_2}(t)\nabla\psi_m(t),\nabla\omega_2^j) - \\ \quad - (Q_1(\nabla\psi_m(t)),\nabla\omega_1^j) - (Q_2(\nabla\psi_m(t)),\nabla\omega_2^j) + (b(u_{m_1}(t),u_{m_2}(t),\nabla\psi_m(t)),\omega_1^j+\omega_2^j) + \\ \quad + < R_\Gamma^1(u_{m_1}(t),u_{m_2}(t)),\omega_1^j >_\psi + < R_\Gamma^2(u_{m_1}(t),u_{m_2}(t)),\omega_2^j >_\psi, \quad 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

$$(2.40b)\quad \begin{cases} u_{m_1}(o) = \mathcal{U}_{m_1 0} \to u_{01} - U_{h_1} \ \underline{\text{dans}}\ V, \mathcal{U}_{m_1 0} \in [\omega_1^1,\omega_1^2,\ldots,\omega_1^m], \\ u_{m_2}(o) = \mathcal{U}_{m_2 0} \to u_{02} - U_{h_2} \ \underline{\text{dans}}\ V, \mathcal{U}_{m_2 0} \in [\omega_2^1,\omega_2^2,\ldots,\omega_2^m], \end{cases}$$

où nous avons encore noté $<.,.>_\psi$ la dualité $H^{-1/2}(\Gamma_\psi),H^{1/2}(\Gamma_\psi)$, et où ψ_m est, comme dans (2.2.), la solution de

$$(2.40c)\quad \begin{cases} \kappa(\nabla\psi_m(t),\nabla\phi-\nabla\psi_m(t)) \geq (N(t) + U_{h_2} - U_{h_1} + u_{m_2}(t) - u_{m_1}(t),\phi-\psi_m(t)) + \\ \quad + \kappa < \tilde{f}_\psi^2,\gamma_o\psi-\gamma_o\psi_m(t) >, \ \forall\phi \in K,\ \psi_m(t) \in K,\ t \in [o,T]. \end{cases}$$

La Remarque 2.1. étant encore applicable, il en résultera que le système (2.40) possède une solution au voisinage de zéro. Comme d'habitude, les estimations "a priori" ci-dessous montrent que cette solution est définie dans tout [o,T]. En fait, on déduit comme dans 2.2.1., les inégalités :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{m_1}(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{m_2}(t)|^2 + \alpha_1|u_{m_1}(t)|^2 + \alpha_2|u_{m_2}(t)|^2 \leq \\ &\leq C_{11}|u_{m_1}(t)||\nabla u_{m_1}(t)| + C_{12}|u_{m_2}(t)||\nabla u_{m_2}(t)| + C_{21}|\nabla u_{m_1}(t)| + C_{22}|\nabla u_{m_2}(t)| + \\ &+ C_{31}|u_{m_1}(t)| + C_{32}|u_{m_1}(t)| + C_{41}|u_{m_1}(t)|^2 + C_{42}|u_{m_2}(t)|^2 + \\ &+ |\Phi(t)|\,\{|u_{m_1}(t)| + |u_{m_2}(t)|\} + \|R_\Gamma^1(u_{m_1}(t),u_{m_2}(t))\|_{L^2(\Gamma_\psi)}\cdot\|u_{m_1}(t)|_{\Gamma_\psi}\|_{L^2(\Gamma_\psi)} \\ &+ \|R_\Gamma^2(u_{m_1}(t),u_{m_2}(t))\|_{L^2(\Gamma_\psi)}\cdot\|u_{m_2}(t)|_{\Gamma_\psi}\|_{L^2(\Gamma_\psi)}, \end{aligned}$$

mais, d'après le Lemme 2.5., on a, pour de diverses constantes $a_i > o$,

$$\sum_{i=1}^{2} \|R_\Gamma^i(u_{m_1}(t),u_{m_1}(t))\|_{L^2(\Gamma\psi)} \cdot \|u_{m_i}(t)|_{\Gamma_\psi}\|_{L^2(\Gamma\psi)} \leq$$

$$\leq a_1\|u_{m_1}(t)|_\Gamma\|^2_{L^2(\Gamma)} + a_2\|u_{m_2}(t)|_\Gamma\|^2_{L^2(\Gamma)} + a_3\{\|u_{m_1}(t)|_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)} + \|u_{m_2}(t)\|_{L^2(\Gamma)}\},$$

et, avec le Lemme 2.4., on obtient que $\forall\varepsilon > o$, il existe $b_\varepsilon > o$, tel que

$$\sum_{i=1}^{2} \|R_\Gamma^i(u_{m_1}(t),u_{m_2}(t))\|_{L^2(\Gamma_\psi)} \cdot \|u_{m_i}(t)|_{\Gamma_\psi}\|_{L^2(\Gamma_\psi)} \leq$$

$$\leq \varepsilon\{|\nabla u_{m_1}(t)|^2 + |\nabla u_{m_2}(t)|^2\} + b_\varepsilon\{|u_{m_1}(t)|^2 + |u_{m_2}(t)|^2 + |\nabla u_{m_1}(t)| + |\nabla u_{m_2}(t)|\}.$$

Si $\varepsilon > o$ est choisi "assez petit" (par exemple $o < \varepsilon < \min(\alpha_1|2,\alpha_2|2)$), il vient, par intégration,

$$(2.41)\quad \begin{cases} |u_{m_1}(t)|^2 + |u_{m_2}(t)|^2 + \alpha_1\int_o^t |\nabla u_{m_1}(\sigma)|^2 d\sigma + \alpha_2\int_o^t |\nabla u_{m_2}(\sigma)|^2 d\sigma \leq \\ \qquad \leq C_o + C_{51}\int_o^t |u_{m_1}(\sigma)|^2 d\sigma + C_{52}\int_o^t |u_{m_2}(\sigma)|^2 d\sigma \end{cases},$$

d'où il existe une constante C_6 (indépendante de m et t), telle que

$$|u_{m_1}(t)| \leq C_6 \ , \quad |u_{m_2}(t)| \leq C_6 \ ,$$

la solution de (2.40) est définie dans $[o,T]$, et elle demeure dans un borné de $L^\infty(o,T;\mathcal{H}) \cap L^2(o,T;\mathcal{V})$.

On considérera maintenant, outre les opérateurs A_t, M_t et Q_t de 2.2.2., l'opérateur

(2.42a) $\quad u \to R(u)$, <u>de</u> $\mathcal{V} \to \mathcal{V}'$,

défini par

(2.42b) $\quad (R(u),v) = \langle R_\Gamma^1(u_1,u_2),v_1\rangle_\psi + \langle R_\Gamma^2(u_1,u_2),v_2\rangle_\psi$, $\forall u = (u_1,u_2)$, $v = (v_1,v_2) \in \mathcal{V}$;

évidemment, l'opérateur $u \to R(u)$ est continu de $\mathcal{V} \to \mathcal{V}'$, et il existe $r > o$, tel que

(2.42c) $\quad \|R(u)\|_{\mathcal{V}'} \leq r\|u\|$, $\forall u \in \mathcal{V}$.

On peut donc assurer pour une sous-suite $\{U_\mu\}$ de $\{U_m\}$,

(2.43) $\quad U_\mu \to U$ <u>dans</u> $L^\infty(o,T;\mathcal{H})$ - <u>faible-étoile</u>,

(2.44) $\quad U_\mu \to U$ dans $L^2(o,T;\mathcal{V})$ - <u>faible</u>,

(2.45) $\quad U_\mu \to U$ <u>dans</u> $L^2(o,T;\mathcal{H})$ - <u>fort et p.p. dans</u> $\Omega \times (o,T)$,

(2.46) $\quad U'_\mu \to U'$ <u>dans</u> $L^2(o,T;\mathcal{V}')$ - <u>faible</u>.

Les relations (2.26)-(2.29) sont aussi vraies ; d'ailleurs, (2.44) et (2.46) entrainent la convergence forte des U_μ vers U dans $L^2(o,T;H^s(\Omega)^2)$ pour tout s : $o \leq s < 1$ (cf., par exemple, LIONS [8]), et donc

$$U_\mu(t)|_\Gamma \to U(t)|_\Gamma \ \underline{\text{dans}} \ \ H^{s-1/2}(\Gamma)^2 \ - \ \underline{\text{fort}}, \ \underline{\text{p.p. dans}} \ [o,T]$$

(s'il le faut, on prendra une sous-suite), d'où une nouvelle application du Lemme 2.5. donne

$$\text{(2.47)} \qquad < R^i_\Gamma(u_{\lambda_1}(t),u_{\lambda_2}(t)),\omega^j_i >_\psi \ \to \ < R^i_\Gamma(u_1(t),u_2(t)),\omega^j_i >_\psi \quad \underline{\text{p.p. dans}} \ [o,T].$$

On déduit alors que la fonction U doit vérifier :

$U \in L^\infty(o,T;\mathcal{H}) \cap L^2(o,T\mathcal{V}) \cap H^1(o,T;\mathcal{V}')$,

$$\text{(2.48)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nabla\cdot(P_1(\nabla\psi)\nabla u_1) - \nabla\cdot(P_1(\nabla\psi)u_1\nabla\psi) + h(u_1 + U_{h_1},u_2 + U_{h_2},\nabla\psi) - \\ &\qquad - R(u_1 + U_{h_1},\ u_2 + U_{h_2}) + \Phi + \nabla\cdot(P_1(\nabla\psi)(\nabla U_{h_1} - U_{h_1}\nabla\psi)) \ , \\ &\frac{\partial u_2}{\partial t} = \nabla\cdot(P_2(\nabla\psi)\nabla u_2) + \nabla\cdot(P_2(\nabla\psi)u_2\nabla\psi) + h(u_1 + U_{h_2},u_2 + U_{h_2},\nabla\psi) - \\ &\qquad - R(u_1 + U_{h_1},u_2 + U_{h_2}) + \Phi + \nabla\cdot(P_2(\nabla\psi)(\nabla U_{h_2} + U_{h_2}\nabla\psi)) \ , \\ &\underline{\text{dans}} \ \Omega \times (o,T) \ , \end{aligned} \right.$$

$$\text{(2.49)} \qquad u_1(x,o) = u_{01}(x) - U_{h_1}(x) \ , \quad u_2(x,o) = u_{02}(x) - U_{h_2}(x) \quad \underline{\text{dans}} \ \Omega \ ,$$

$$\text{(2.50)} \qquad u_1 = o, u_2 = o \ , \ \psi = f^1_\psi \quad \underline{\text{sur}} \ \Gamma_u \times (o,T) \ ,$$

$$\text{(2.51)} \qquad \nu\cdot(\nabla u_1 - u_1\nabla\psi) = \nu\cdot(\nabla U_{h_1} - U_{h_1}\nabla\psi) + R^1_\Gamma(u_1,u_2) = R^1_\Gamma(u_1,u_2) \ , \ \underline{\text{sur}} \ \Gamma_\psi \times (o,T) \ ,$$

$$\text{(2.52)} \qquad \nu\cdot(\nabla u_2 + u_2\nabla\psi) = \nu\cdot(\nabla U_{h_2} + U_{h_2}\nabla\psi) + R^2_\Gamma(u_1,u_2) = R^2_\Gamma(u_1,u_2) \ , \ \underline{\text{sur}} \ \Gamma_\psi \times (o,T) \ ;$$

la fonction ψ est à nouveau donnée par :

$$\text{(2.53)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\kappa(\nabla\psi(t),\nabla\phi - \nabla\psi(t)) \geq (N(t) + U_{h_2} - U_{h_1} + u_2(t) - u_1(t),\phi - \psi(t)) + \\ &\qquad + \kappa < \tilde{f}^2_\psi,\gamma_o\phi - \gamma_o\psi(t) > \ , \ \forall\phi \in K, \ \psi(t) \in K, \ t \in [o,T] \ . \end{aligned} \right.$$

On a donc démontré le

<u>Théorème 2.2.</u> : <u>"Avec les notations et les hypothèses précédentes, il existe une solution</u> $\tilde{U} = (\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)$ <u>du problème</u> :

$$(2.54)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t} = \nabla\cdot(P_1(\nabla\psi)\nabla\tilde{u}_1) - \nabla\cdot(P_1(\nabla\psi)\tilde{u}_1\nabla\psi) + h(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\nabla\psi) - R(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2) + \Phi, \\ \dfrac{\partial \tilde{u}_2}{\partial t} = \nabla\cdot(P_2(\nabla\psi)\nabla\tilde{u}_2) + \nabla\cdot(P_2(\nabla\psi)\tilde{u}_2\nabla\psi) + h(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\nabla\psi) - R(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2) + \Phi, \\ \underline{\text{dans}}\ \Omega \times (o,T)\ , \end{cases}$$

$$(2.55)\quad \begin{cases} x(\nabla\psi(t),\nabla\phi - \nabla\psi(t)) \geq (N(t) + \tilde{u}_2(t) - \tilde{u}_1(t),\phi - \psi(t)) + x < f_\psi^2,\gamma_o\phi - \gamma_o\psi(t) > , \\ \forall\phi \in K\ ,\ \psi(t) \in K\ ,\ t \in [o,T]\ , \end{cases}$$

(ou bien, de façon équivalente

$$(2.55')\quad J_p(t;\psi(t)) = \inf J_p(t;\phi)\ ,\ \phi \in K\ ,\ t \in [o,T],$$

avec

$$J_p(t;\phi) \equiv \frac{\kappa}{2}(\nabla\phi,\nabla\phi) - (N(t) + \tilde{u}_2(t) - \tilde{u}_1(t),\phi) - \kappa < \tilde{f}_\psi^2,\gamma_o\phi >)\ ,$$

$$(2.56)\quad \tilde{u}_1(o) = \tilde{u}_{01}, u_2(o) = u_{02}\quad \underline{\text{dans}}\ \Omega,$$

$$(2.57)\quad \tilde{u}_1 = f_{u_1}^1,\ \tilde{u}_2 = f_{u_2}^1,\ \psi = f_\psi^1\quad \underline{\text{sur}}\ \Gamma_u \times (o,T)\ ,$$

$$(2.58)\quad \nu\cdot(\nabla\tilde{u}_1 - \tilde{u}_1\nabla\psi) = R_\Gamma^1(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)\ ,\ \nu\cdot(\nabla\tilde{u}_2 + \tilde{u}_2\nabla\psi) = R_\Gamma^2(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)\ \text{sur}\ \Gamma_\psi \times (o,T).$$

<u>Remarque 2.8.</u> : On peut aussi bien considérer un problème analogue, dont les fonctions $\tilde{f}_{u_i}^1$ dépendent de la variable t. Sous des hypothèses convenables (cf. LIONS-MAGENES [9]), on peut trouver une fonction $U_h \in L^2(o,T;H^2(\Omega)^2)$, $U_h = (U_{h_1},U_{h_2})$, telle que :

$$U_{h_i} = f_{u_i}^1\quad \underline{\text{sur}}\quad \Gamma_u \times (o,T)\ ,$$

$$U_{h_i} = o\quad \underline{\text{sur}}\quad \Gamma_\psi \times (o,T)\ ,$$

et

$$\nu\cdot\nabla\ddot{U}_{h_i} = o\ \underline{\text{sur}}\quad \Gamma_\psi \times (o,T)\ ,$$

les Théorèmes 2.1. et 2.2. ayant encore lieu.

<u>Remarque 2.9.</u> : Evidemment, si $\tilde{U} = (\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)$ est une solution de (2.1)-(2.6) (avec $f_{u_i}^2$ connue ou bien égale à $R_\Gamma^i(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)$),et en outre la correspondante fonction ψ (solution de $(\mathcal{P}_p)$ pour $\omega = N(t) + u_2(t) - u_1(t)$) vérifie $\psi \in L^\infty(o,T;L^2(\Omega)) \equiv L^\infty(\Omega \times (o,T))$, alors il existe $\psi > o$ tel que U est aussi solution du problème réduit correspondant (c'est-à-dire, (2.1.),

(2.1), (2.2), (2.36), (2.56)-(2.58), resp.). Du point de vue physique, on cherche un potentiel ψ continu (et donc borné) dans tout le dispositif, d'où il semble raisonnable d'établir, comme nous avons fait ici, l'existence des problèmes réduits.

Remarque 2.10. : La méthode que nous avons employé ici est inspirée par les techniques utilisées dans LIONS [10] pour démontrer l'existence de solutions des équations de NAVIER-STOKES.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma gratitude au Professeur R. GLOWINSKI de l'INRIA pour le soutien accordé pendant la mise au point de ce travail et qui a bien voulu relire le manuscript, ainsi qu'à Mme M. DESNOUS et à Mme WEBER pour le soin apporté à la dactylagraphie.

REFERENCES

MERCKEL G., [1] "Relations et Données Relatives au TMOS, pour une Analyse Bidimensionnelle (Eléments Finis) du Comportement Electrique". LETI/MEA, 80/27, Janvier 1980.

MOCK M.S., [2] "An Initial Value Problem from Semiconductor Device Theory", SIAM J. Math. Anal., Vol. 5, N° 4 (1974), pp. 597-612.

BERGER M.S. [3] "Nonlinearity and Functional Analysis". Academic Press, New-York, 1977.

EKELAND I., TEMAM R. [4] "Analyse Convexe et Inéquations Variationnelles". Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1976.

BOURBAKI N.,[5] "Eléménts de Mathématiques : Libre VI, Intégration"

KONDRACHOFF, V.I. [6] "Sur Certaines Propriétés des Fonctions de l'Espace L^P". Doklady Ak. Nank., 48 (1945), pp. 563-566.

HORVATH J. [7] "Topological Vector Spaces and Distributions", Addison Wesley, Readings, Mass. 1966.

LIONS J.L. [8] "Equations Différentielles Opérationnelles et Problèmes aux Limites". Springer-Verlag, Berlin, 1961.

LIONS J.L.-MAGENES E., [9] "Problèmes aux Limites non Homogènes". Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1968.

LIONS J.L., [10] "Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires". Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique